大学数学基础课教学中融入数学建模思想的实践

赵润华，李晓翠，马立涛

（河北工程大学 理学院，河北 邯郸 056038）

[摘　要] 数学建模不仅限于解决实际问题，也可以是数学发展过程中提出的理论问题。基于近年来在大学数学基础课教学中融入数学建模思想的教学实践，论述了其主要思路与做法。介绍了将数学建模思想融入数学基础课教学的两个教学案例，即微积分方法的本质和从方程组出发引入线性相关与线性无关概念。

[关键词] 数学建模思想；微积分方法；微积分基本定理；线性相关；线性无关

[中图分类号] G642　[文献标识码] A　[文章编号] 1673－9477(2009)03－0107－03

一、主要思路

数学建模是利用数学知识解决实际问题的一种思想方法。数学建模是将数学知识与现实世界中的问题联系起来的桥梁。用数学方法解决实际问题的过程是：将实际问题用数学语言来描述，建立数学模型，变成数学问题；利用现有的数学工具或者新发明数学工具来加以解决，求得数学解；再经过检验得到实际问题的解。

利用数学知识来解决问题，不仅限于解决现实生活中可以直接产生效益的问题，也可以是数学发展过程中提出的理论问题。只要这些问题是学生容易理解并且感兴趣的，可以利用已学过的基础知识建立模型来解决这些问题，学生经历这个过程之后，有利于加深他们对基础知识的理解和提高应用能力，这样的问题就可以作为案例引入基础课程教学。

在数学发展史上，这些基础课程的知识本身就是为了解决一些重大的问题而 发明出来的，就是为了解决这些问题而进行数学建模的结果。虽然现在我们没有必要重复当初发明这些知识的过程，但是可以设计一些学生容易理解并且引起兴趣的问题，引导学生在通过建立数学模型来解决这些问题的过程中将基础课程中的一些知识重新“发明”一遍。这样“发明”出的知识，对人类当然不是新的发明创造，但对学生却是新的。通过这个过程，不但能让他们更深刻地理解这些基本知识的核心思想，而且经历了一次模拟发明创造的训练，从而提高学习的积极性、主动性和创新能力。所以，将数学建模思想融进大学数学基础课程教学是搞好大学数学基础课程教学改革值得做的第一件事。

二、教学案例

案例1. 微积分方法的本质——微观与宏观的统一

解决两个问题：问题1 微观上的变化率；问题2 宏观上的整体量。

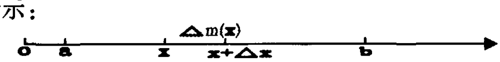
1. 均匀与非均匀

数学上，世界万物都是以量或其空间形式来表示的。以量的角度都可以划分为均匀和非均匀两类：均匀变化或均匀分布；非均匀变化或非均匀分布。所谓均匀，就是单位时间或单位几何度量上所论量的改变量处处相同，而非均匀时，则不尽相同，随点而异。从所论量的变化率的观点来看，均匀与非均匀，表现为变化率是常量还是变量。例如，物质细棒，质量 在棒上均匀分布，即变化率（线密度）$\mu=\frac{\Delta m}{\Delta x}$为一常量；非均匀分布时，$\mu=\frac{\Delta m}{\Delta x}$为一变量。若将所论量看作一变量（或变量在一区间上的改变量），从函数的观点，均匀可用线性函数描述，而非均匀时，则是非线性函数。例如，当$\frac{\Delta m}{\Delta x}$为一常数时，密度函数 $m(x)$ 为一线性函数，否则是一非线性函数，从所论述函数的图象来看，均匀与非均匀变化的量分别表现为直线与曲线。

对于均匀变化或均匀分布的问题，从微观上研究变化率，即对问题1只需用除法。例如，对上述物质细棒，质量 的变化率（即线密度）。从宏观上研究其整体量，即问题2，只需使用乘法，如 $m=\mu\cdot l$（其中 l 为细棒长度）。但对于非均匀的问题，正如我们已经知道的，从微观上研究变化率（即问题1）则需要导数 $\mu(x)=\frac{dm(x)}{dx}$（物质细棒的线密度）；从宏观上研究整体量（即问题2）则需要积分。因此，我们说微积分分别是处理均匀量的除法和乘法，在处理相应的非均匀量中的发展而已。

2. 微积分方法的对立与统一

我们以上述非均匀物质细棒为例来分析从处理均匀量发展到处理非均匀量的思想方法。取坐标轴如图所示：



先研究问题1，即其线密度 $\mu(x)$。设质量函数 $m(x)$ 已知，求线密度（即 $m(x)$ 的变化率）的方法可分为两步：

（1）“匀”：尽管质量在细棒上非均匀分布，但在微小区间 $[x,x+\Delta x]$ 上可近似看作是均匀分布的。以“匀”代“不匀”，或者说对变化率以“不变”代“变”，利用处理均匀问题的除法得

$$\mu(x)\approx\frac{\Delta m(x)}{\Delta x}$$

（2）“精” $|\Delta x|$：越小，近似程度越高，于是令 $\Delta x\to 0$，根据极限思想，将此近似值转化为精确值，即

$$\mu(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{dm}{dx}$$

现研究问题2，即从宏观上研究物质细棒的整体质量 m。设线密度 $\mu(x)$ 已知，求细棒的质量 m。其思想方法仍是上述两大步骤：

（1）“匀”：非均匀变量近似等于均匀变量只在微小区间（或微小局部）才能成立。因此要处理这一非均匀分布的整体质量，首先必须划分此细棒为若干小段，再在各小段上以“匀”代“不匀”，因此，这一思想方法需要分为两步来实现：

①“分”：将区间 $[a,b]$ 任意划分为 n 个小区间，考

[收稿日期] 2009－07－03

[作者简介] 赵润华（1957－），男，山东茌平人，副教授，研究方向：数学教育与应用。

察每个微小区间 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$ 上的小段;

②"匀":$[x_{i-1},x_i]$ 在 上将质量近似看作均匀分布,利用处理相应均匀量的乘法得:

$$\Delta m_i \approx \mu(\xi_i)\cdot\Delta x_i, x_{i-1}\le\xi_i\le x_i, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

(2)"精":由于所求的是整体量,因此,先要把局部的近似值累加起来,再向精确值转化。所以实现"精"的思想也需两步来完成:

①"合":$m=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\xi_i)\Delta x_i$;

②"精":$m=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\xi_i)\Delta x_i\overset{\Delta}{=}\int_a^b\mu(x)dx,\lambda=\max(\Delta x_i),1\le i\le n.$

可见,导数与定积分虽然是微观和宏观两种不同范畴的问题,但他们都是研究非均量产生的数学概念,解决问题的思想方法也是一样的。可归结为两大步:

(1)微小局部,求近似:

(2)利用极限得精确值。而积分中的"分"是"匀"的需要;"合"是计算整体量本身的要求。微积分的这一基本思想方法贯穿在整个一元和多元函数的微积分中,并且将指导着我们应用微积分去解决各种相关的实际问题。

3. 更进一步,从理论上推导微积分的辩证统一

我们已经学过微分中值定理

$$f(b)-f(a)=f(\xi)(b-a),a<\xi<b$$

该公式是连接局部性质和整体性质的桥梁。其左边是整体性的由区间 的端点所决定,右端是局部性的,由$[a,b]$内某点的导数(局部性)所决定。我们抛开问题的实际意义,利用微分中值定理从理论上推导微分与积分的辩证统一。

推导过程:

假定区间$[a,b]$上的整体量为F,并且 $F'(x)=f(x)$,

那么 $F\approx\Sigma\Delta F_i=\Sigma[F(x_i)-F(x_{i-1})]=\Sigma F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$

$$=\Sigma f(\xi_i)\Delta x_i\to\int_a^b f(x)dx$$

上述推导也预示着伟大的牛顿—莱布尼兹公式 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ 成立。该公式将表面上看起来毫无关系的微分与积分之间建立起了一座桥,将对立的微分与积分统一起来。可谓"一桥飞架南北,天堑变通途"。数学上的和谐与统一当以此为最。

线性代数课程的内容比微积分学的内容少得多,但学生普遍感到该课程更难学,概念更抽象,知识难以掌握,其中以向量组的线性相关性为甚。下面是向量组的线性相关性一堂课的教学案例,以期同行们共同研讨。

案例2. 从方程组出发引入线性相关与线性无关概念。

问题:我们希望研究方程组中方程的个数与解集合的大小的关系。

经启发学生会大体上感觉到:方程的个数越多,解集合越小。因为,一个二元一次方程有无穷多解,而两个二元一次方程的方程组就可能仅有唯一解。但是,方程组的方程个数怎样计算?

例如,方程组

$$\begin{cases}x+y+z=0\cdots(1)\\2x+y+5z=0\cdots(2)\\3x+2y+6z=0\cdots(3)\end{cases}\quad(\text{Ⅰ})$$

有几个方程?

同学们可能有不同的答案:3个方程!2个方程!那么,本质上究竟是几个方程?有的同学可能会看出,方程(3)可由方程(1)、(2)相加得到。如果将方程(3)从方程(1)中删去,就得到方程组

$$\begin{cases}x+y+z=0\\2x+y+5z=0\end{cases}\quad(\text{Ⅱ})$$

则方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价,即两个方程组同解。这样在解方程组(Ⅱ)时,我们称方程(3)是"多余的"。结论是,实际上方程组(Ⅰ)中仅有2个方程。

由此引入:如果一个方程组中有某个方程是其余方程的线性组合(即该方程不是独立的),就称这个方程组中的方程线性相关;如果其中每个方程都不是其余方程的线性组合(即每个方程均是独立的),则称这些方程线性无关。

更进一步:"打假"到底→极大无关组,秩。

将方程组(Ⅰ)推广至一般线性方程组。如果一个线性方程组的方程线性相关,即方程组中必有某个方程是其余方程的线性组合(即该方程是多余的),将它删去(称为"打假")后不会改变方程组的解。剩下的方程组如果仍然线性相关,再删去一个多余方程(继续"打假")。重复进行这一过程(将"打假"进行到底),直到剩下的方程线性无关,最后剩下的这些方程的个数才是原方程组中的"真正个数",称为原方程组的秩。最后这些方程所组成的集合称为原方程组的极大无关组。因此,我们可以得到一个结论:同一个线性方程组的任意两个极大无关组等价(它们均与原方程组同解),并且它们所含方程个数一定相等,即秩的唯一性。

上述关于方程组的相应概念可完全平行地推广到向量组上来。

一个方程完全由其系数组成的有序数组(即向量)惟一表示。例如方程组(Ⅰ)中的方程(1)、(2)、(3)分别对应于3个向量 $\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(2,1,5),\alpha_3=(3,2,6)$。于是,我们有:如果同维的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_m$ 中有某个向量 α_i 是其余向量的线性组合,则称整个向量组线性相关,否则称它们线性无关。

还可以更进一步,以3个向量的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为例,如果我们发现 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=\alpha_3$ 无解,则说明 不是 的线性组合。但还需验证 $x_1\alpha_1+x_3\alpha_3=\alpha_2$ 或 $x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_2$ 是否有解来判断 α_2 或 α_1 是否是其余两个向量的线性组合,才能断定 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是否线性无关,这样的解答方法太笨。

我们注意到:如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中有某个 α_i 是另外两个 α_j,α_k 的线性组合,即存在数 λ_j 和 λ_k 使 $\lambda_j\alpha_j+\lambda_k\alpha_k=a_i$ 成立,则 $\alpha_i-\lambda_j\alpha_j-\lambda_k\alpha_k=\vec{0}$. 表明关于未知数 x_i,x_j,x_k 的方程组 $x_i\alpha_i+x_j\alpha_j+x_k\alpha_k=\vec{0}$ 有解 $(x_i,x_j,x_k)=(1,-\lambda_j,\lambda_k)$,其中 $x_i=1\neq0$. 因此,如果 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\vec{0}$ 仅有惟一零解 $x_1=x_2=x_3=0$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。反之,设 x_1,x_2,x_3 满足 $x_i\alpha_i+x_j\alpha_j+x_k\alpha_k=\vec{0}$,且其中某个 $x_i\neq0$,不妨设 $x_1\neq0$,则有 $\alpha_1=-\frac{x_2}{x_1}\alpha_2-\frac{x_3}{x_1}\alpha_3$。这说明 α_1 是其余两个向量 α_2,α_3 的线性组合,从而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。因此,我们有:

定义:设m个向量的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,如果存在不全为0的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m$ 使 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots\lambda_m\alpha_m=\vec{0}$,则称整个向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关。否则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关。

并且得到:向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关 其中至少有某个向量 是其余向量的线性组合。

[参考文献]

[1]李尚志. 从问题出发引入线性代数概念[J]. 高等数学研究,2006,9(5):6—8.

[2]大学数学论坛组委会. 大学数学课程报告论坛论文集[C]. 马知思. 微积分的基本思想方法及其应用[A]. 北京:高等教育出版社,2006. 53-59.

(下转第115页)

的理解。使学生熟练地把整体阅读的方法运用到他们英语阅读中,提高他们的理解能力。

(四)强化学生的阅读速度练习

1.浏览所提问题,提高寻找具体信息的技能。一般来说,作者根据自己的意图和思维模式,通过一定的语言手段,把分散的、细节的、具体的材料组织在一起,在训练或测试中,命题者往往采用多种方式进行提问,有直接的和间接的,但不管怎样,命题范围和思想基本与作者一致。阅读者首先要搞清楚问题的要求,带着问题和所需的信息去查询,以提高阅读速度。

2.扩大知识领域,提高猜词悟意的技能。语言学家把猜词悟意的方法归纳总结为"定义法、同位法、反义法、上下义法"等方法。但这些方法都离不开两大要素,首先是阅读者本身的文化修养,既语言、文化素质。其次是通过全局识破个体的能力。这就要求读者要不断扩大自己的知识面,懂得社会、天文、地理、财经、文体等科普性知识。另外,要通过上下文的联系来猜测一个词的涵义或一个段落的大意。

3.阅读理解和阅读速度是阅读效率的两大因素。要提高学生的阅读效率,一方面必须加强对学生的快速阅读训练。快速阅读是一种行之有效的阅读方法,对培养学生提高阅读速度和理解能力具有建设性作用。另一方面,教师在教学中还应全面地培养和训练学生的阅读技能和技巧,教会学生在阅读时如何运用略读跳读两种快速阅读方法获取信息的能力,鼓励学生利用预测、联想、类推和运用语言规则猜出文章的意思,使学生运用所学知识分析问题、解决问题的能力得到锻炼。为提高阅读速度,可以采取随机方法来确定阅读训练的内容,让学生在规定时间内完成阅读和练习。阅读时要求学生集中精力,全神贯注,不能查字典和其它工具书,以提高阅读速度。学生读完文章做完练习后,由教师宣布答案,同学换卷评分和报告分数,教师作好登记,随时掌握学生阅读速度和阅读理解两方面的进展情况。一旦发现问题就及时加以解决,然后,教师对文章中的一些语言难点,语法结构和文化背景知识加以点拨和启发,拓宽学生的知识面。

(五)培养学生的英语文化基础

在阅读过程中,如果学生缺乏一定的文化背景知识,即使能认识每一个单词,也不一定能正确理解文章的含义。大量的语言试验说明,英语阅读的障碍不仅仅存在于词汇和语法方面,语言所承载的背景知识和文化信息也是阅读理解的主要障碍之一。语言是文化的重要载体,语言与文化密切联系。长期以来,在英语教学中语言和文化的这种关系一直未得到足够的重视。而实际上由于不了解语言的文化背景,不了解中西文化的差异,在英语学习和用英语进行交际中屡屡出现歧义误解频繁,语用失误迭出的现象。

总之,阅读可以说是一个人的语言知识、背景知识和其它专业知识相互作用的过程,是根据已有的语言材料、文化知识和逻辑推断进行推测和纠正的过程。因此,教师只有引导在教学中,教师只有充分调动学生学习的积极性,不断克服阅读过程中的不良习惯,鼓励学生正确运用阅读方法和技巧,不断加大阅读量,扩大英语词汇量,才能真正提高阅读水平。

[参考文献]

[1]林朝霞.培养学生英语阅读能力的方法[J].广西教育,2006,(3):35.
[2]马国英.英语阅读能力的培养[J].太原科技,2005,(5):51.
[3]何青.高职英语阅读课语篇教学之探讨[J].职教论坛,2005,(3):51.
[4]龚兵.英语词汇知识广度与阅读能力的相关性[J].深圳职业技术学院学报,2004,(4):19.
[5]田婷.如何提高英语阅读能力[J].大学英语(学术版),2004,(4):46.

[责任编辑:陶爱新]

Analysis on the ways of improving students' reading abilities in secondary vocational schools

XU Lu, SU Hong-liang

(Foreign Language Department, Handan Polytechnic College, Handan 056055, China)

Abstract: Reading practice is the important part of English learning. Reading abilities are the foundation of listening, speaking, writing and translating. Teaching of vocational English reading is the effective way to foster student's abilities of getting all kinds of information through English and possess vocational professional skills and communicative abilities. On the basis of analyzing the status quo of the teaching of vocational English reading, the writer points out that the main problems lie in inappropriate courses, out—dated teaching method and teaching pattern of reading, and students' bad reading habits. For these problems, the author puts forward some suggestion on how to improve students' reading abilities.

Key words: vocational education; English reading; reading abilities

(上接第108页)

[3]李大潜.中国大学生数学建模竞赛(第三版)[M].北京:高等教育出版社,2008.
[4]韩中庚.数学建模方法及其应用[M].北京:高等教育出版社,2005.

[责任编辑:陶爱新]

The practice of putting mathematical modeling into the foundations of mathematics teaching

ZHAO Run-hua, LI Xiao-cui, MA Li-tao

(College of Science, Hebei University of Engineering, Handan 056038, China)

Abstract: Mathematical modeling is not only limited to solve practical problem, but can be the theoretical issues during the development of mathematics. The article, which is based on the author's exploration and practice in recent years, discusses the main idea and introduces a few of teaching cases of putting the idea of mathematical modeling into the foundations of mathematics teaching.

Key words: the idea of mathematical modeling; calculus methods; fundamental theorem of calculus; linear; linearly independent