第 33 卷　第 3 期　河北工程大学学报（社会科学版）　Vol.33　No.3
2016 年 9 月　Journal of Hebei University of Engineering (Social Science Edition)　Sept.2016

关于一个重要极限的几点教学体会

赵润华，石国红
（河北工程大学 理学院，邯郸 056038）

[摘　要]介绍了关于极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在性的一种初等而简便的方法，以及说明其极限等于 e 的清晰模式，最后阐述了该极限应用中的基本方法总结.

[关键词]重要极限；教学体会；应用方法
doi:10. 3969/j. issn. 1673-9477. 2016. 03. 040
[中图分类号] G642　[文献标识码] A　[文章编号] 1673-9477(2016)03-125-02

极限是高等数学教学的难点，而两个重要极限及其应用又是极限理论的重点之一。总结多年的教学经验，仅对第二个重要极限谈以下三点教学体会，以期与同行共同探讨。一是关于极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在性证明除通常利用二项式展开定理的证明方法外，还有另一种简便方法；二是如何使学生确信这个重要极限是 e，纵观国内外高等数学教科书，在证明了这个极限存在后，无论是理科还是工科教材都是直接定义这个极限等于 e，这使学生不知可否。为此，可以用数表模式予以解决；三是该重要极限应用中，学生有时不知所措，本文总结了利用该极限求相应极限的三种基本方法，以便使学生有法可依。

一、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在性的一种初等而简便证法

关于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 这个重要极限的存在性，在国内外高等数学教科书中通常都是利用二项式展开定理来说明 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的单调性及有界性，本文介绍另一种初等而简便的方法。

（一）先建立不等式：$b^n[b-(n+1)(b-a)]<a^{n+1}$

$$(b\succ a\succ 0) \qquad (1)$$

事实上，$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}=b^n+ab^{n-1}+a^2b^{n-2}+\cdots+a^{n-1}b+a^n$

$$<b^n+b\cdot b^{n-1}+b^2\cdot b^{n-2}+\cdots+b^{n-1}\cdot b+b^n$$

$$=(n+1)b^n\text{。}$$

对上述不等式整理，即得，不等式（1）。

（二）单调性

在（1）式中，取 $a=1+\frac{1}{n+1},b=1+\frac{1}{n}$，即刻得到

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

这就证明了数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是单调增加的。

（三）有界性

在（1）式中，取 $a=1,b=1+\frac{1}{2n}$，得 $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n<2$，于是 $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}<4$，再由已证得的单调增加性，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}<4,$$

即数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 有上界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在。

[投稿日期]2016-08-28
[作者简介]赵润华（1957-），男，山东茌平人，副教授，研究方向：教学法研究。

二、该极限等于e的一种清晰模式

诚然，该方法对数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$的上界的估计不如二项式展开定理估计的精确，但两种方法都不能使学生确认它的极限等于e。为此，可采用如下数表形式：

n	1	3	5	10	100	1000	10000	100000	⋯
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.37	2.488	2.594	2.705	2.7169	2.71815	2.71827	⋯

注：无理数$e=2.718\,2818\,1828\,4590\,45\cdots$。

从数表中，学生看到了一个清晰模式，直观上确认这个重要极限的值为e。

三、应用其代数地求极限的基本方法总结

这个重要极限是处理“1^∞”型极限的一个模型，应用其求极限的基本方法总结如下：

（一）直接法

将底化为$1+\alpha(x)$，指数化为$\frac{1}{\alpha(x)}$乘以常数，其中$\lim\alpha(x)=0$。

例1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{x+2}$。

解 原极限$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-4}\cdot(-4)}=e^{-4}$。

（二）利用其等价形式，采取变量代换法

例2 $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}}$。

解令$x-3=t$，则原极限

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t+1}\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot(-1)}=e^{-1}。$$

此题若采用方法1将转化为较复杂的极限问题，读者不妨试一试，进行比较。

（三）等价无穷小代换法

设在自变量同一变化过程中，$\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=\infty,\lim\alpha(x)\beta(x)$存在，则

$$\lim(1+\alpha(x))^{\beta(x)}=\lim e^{\alpha(x)\beta(x)}。$$

例3 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$。

解原极限

$$=\lim_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

参考文献：

[1]同济大学数学系.高等数学[M]:高等教育出版社，2006.

[2]华罗庚.高等数学引论[M]:科学出版社，1979.04.

[3]叶其孝等译.托马斯微积分[M]: 高等教育出版社，2013.12.

[4]菲赫金哥尔茨著.叶彦谦等译.微积分教程[M]:人民教育出版社，1980.02.

[责任编辑 王云江]

Some teaching experience of an important limit

ZHAO Run-hua, SHI Guo-hong

(College of Mathematics and Physics, Hebei University of Engineering, Handan 056038, China)

Abstract: This paper introduces a primary and simple method of the existence of $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, and illustrates the pattern of the limit being equal to e and finally sets forth the basic methods of the limit in practice.

Key words: important limit; teaching experience; application methods